"No olvidar el origen concreto de la matemática ni los procesos históricos de su evolución"*

Emma Castelnuovo
10-05-2000

Queridos amigos, no puedo dar una conferencia con un título que corresponde a una frase de Pedro Puig Adam sin decir, yo también, unas palabras sobre este amigo excepcional.

Conocí a Pedro en Roma, cuando se encontraba con doña María Luisa (su mujer) de viaje turístico; era el mes de junio de 1956.

Después, pasé una semana con Pedro durante el Congreso en Madrid de nuestra Comisión Internacional para el Estudio y la Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas (CIEAEM). Se debatía el tema *El material didáctico matemático actual*. Era el mes de abril de 1957. Recuerdo como si fuera ayer la escena en la estación de Madrid la mañana del 21. Yo llegaba de Italia con cuatro amigos; un viaje interminable. Bajamos del tren y vimos, entre la mucha gente que esperaba, una persona que levantaba un cartel que ponía *Emma*. Pedro tenía miedo a no encontrarnos y… debíamos enseguida ir a El Escorial… antes de la sesión inaugural de la tarde.

No hablaré del formidable Reencontré, porque todas las actividades que tuvieron lugar en él están publicadas e ilustradas.

Tras este Congreso, hubo entre ambos un intercambio de libros y publicaciones y cartas. Visto desde la actualidad ese periodo me parece de mucho más que tres años de duración, tan fuerte fue la huella dejada por este amigo.

Hoy, después de medio siglo, la Sociedad Madrileña de profesores de Matemáticas presenta una exposición de modelos para el aprendizaje de las matemáticas en relación con ciertos tópicos curriculares. Y son los amigos

* Conferencia pronunciada en Madrid, el 10 de mayo de 2000, en el IES San Isidro, con motivo del Acto de celebración del 100º aniversario del nacimiento de Pedro Puig Adam y de la inauguración de la exposición 2000, piezas matemáticas, elaborada por la SMPM "Emma Castelnuovo".

de la Sociedad los que me han invitado a decir algo sobre la función del material en la enseñanza de las matemáticas.

Me ha gustado titular esta charla con el punto dos del Decálogo de Pedro Puig Adam: *No olvidar el origen concreto de la matemática ni los procesos históricos de su evolución*.

Pero han pasado muchos años desde esta declaración. Han cambiado los alumnos, los profesores, todo el ambiente de la escuela y de su entorno. ¿Qué representa hoy en día el material para el estudio de la matemática? ¿Qué puede significar el uso de un material concreto y simple para chicos que viven inmersos en la más sofisticada tecnología?

Aún más, ¿no son las matemáticas de hoy aún más abstractas que las de ayer? Si usamos materiales manipulables ¿no existe el peligro de dar a los alumnos una idea completamente falsa de esta ciencia?

Para aclarar estos interrogantes se debe, en mi opinión, considerar el problema didáctico en un contexto histórico que destaque:

1. Los grandes cambios en la enseñanza de las matemáticas.
2. Las vías de la investigación matemática en el trabajo de los grandes pensadores.

Quisiera, por tanto, hacer unas consideraciones sobre estos dos puntos para llegar al problema actual del material didáctico. La finalidad de estas consideraciones es analizar nuestro trabajo con más claridad y serenidad.

La historia

1. Cambios en la enseñanza de la matemática.

Desde siempre se ha dicho que son las matemáticas inspiradas en Euclides las que facilitan la comprensión de un sistema axiomático. Pero –como se declaró hace 40 años– la matemática euclídea no es el único ejemplo que permite presentar a los alumnos una teoría axiomática.

En los años 60 la mayoría de los matemáticos de diferentes países decidieron cortar en seco con la tradición. Se necesitaba un cambio y se cambió. Pero el rechazo a Euclides no se debe ciertamente a una exigencia didáctica, sino al hecho de que se quería introducir, también en las escuelas, las teorías que se trataban en las facultades de matemáticas y que eran la base de toda la matemática: conjuntos y estructuras.

Esta nueva matemática –la llamada matemática moderna– inspirada en la teoría de conjuntos, empezó su introducción en el curso 1960-61. Partiendo de Francia, Bélgica, Estados Unidos, se propagó rápidamente por casi todos los países haciendo iguales a los alumnos. Iguales porque, durante unos quince o veinte años, los alumnos fueron aplastados por teorías aún más lejanas de la realidad.

Es importante destacar que este cambio repentino, de una matemática abstracta a una aún más alejada de la realidad fue provocado, o por lo menos promovido, por un hecho que no tiene nada que ver con la enseñanza. La causa principal es un evento tecnológico: el lanzamiento en 1957 por los rusos del primer satélite, el Sputnik. En efecto, este evento extraordinario determinó rivalidades políticas por parte de los Estados Unidos.

¿Por qué los rusos y no los americanos? El éxito de su tecnología –se dijo– se debía al hecho de que en Rusia la enseñanza de la matemática en todos los niveles escolares estaba enormemente desarrollada. Las escuelas secundarias rusas tenían muchas horas de matemáticas.

Es importante destacar, no obstante, que la enseñanza en Rusia no estaba inspirada en la teoría de conjuntos sino, por el contrario, era rígidamente clásica, euclídea.

Consideraremos ahora lo que sucedió en la mayoría de los países occidentales y en los Estados Unidos.

En casi todos los países, el cambio repentino de la matemática euclídea a una matemática basada en la teoría de conjuntos, la matemática moderna, se produjo de un curso escolar para el siguiente y el resultado fue la extinción de toda posible interacción de los alumnos. En efecto, los chicos no estaban en condiciones de intervenir en clase, porque los objetos que se estudiaban eran demasiado abstractos y estaban fuera de la realidad.

Para darnos cuenta de la situación a la que se había llegado debemos remontarnos al 1976. Durante el congreso de la ICME en Karlsruhe, el geómetra inglés Michael Atiyah atacó con fuerza a sus colegas universitarios, declarando que una teoría abstracta como la de los conjuntos no podía estimular a los chicos; era necesario –dijo– reintroducir la geometría para suscitar el interés creativo y excitar la fantasía. Como consecuencia de esta fuerte toma de posición y del hecho de que los resultados escolares eran absolutamente negativos, la moda de los conjuntos se apagó poco a poco.

Reflexionemos ahora desde un punto de vista pedagógico. En ambos casos, la matemática euclídea y la matemática de los conjuntos presentan teorías que están perfectamente estructuradas desde un punto de vista lógico. Pero no es la perfecta redacción lo que puede estimular a los alumnos pues no están en condiciones los chicos de apreciar el valor de una sistematización rígidamente lógica. Para despertar su interés, para lograr la participación del alumnado, para que la enseñanza sea viva, no es el estadio final, la meta, lo que se debe destacar sino las vías por las que se ha desarrollado la investigación, el camino por el que han avanzado las ideas.

2. Unos ejemplos de investigación matemática en la historia.

Para aclarar esta afirmación presentaré algunos ejemplos históricos. Pretendo destacar el papel de la observación y de la experimentación en los trabajos de Menecmo, Arquímedes y Galileo.

Menecmo

Mientras las figuras de Arquímedes y de Galileo son bien conocidas, el nombre de Menecmo no es tan popular.

Menecmo (350 a.C.) es un matemático griego de la escuela de Platón. A partir de comentarios históricos posteriores podemos deducir que fue Menecmo el primero en tener una idea unitaria de las cónicas. La parábola, la hipérbola y la elipse eran conocidas a través de los problemas relacionados con la duplicación del cubo, pero se veían como curvas diferentes por su forma y sus propiedades.

Fue Menecmo –y la primera información sobre este hecho proviene de Eratóstenes (250 a.C.)– el primero en considerar *iguales* estas curvas que no parecen tener nada en común. Menecmo descubrió que las tres pertenecen a una misma familia como secciones del cono.

¿Cómo llegó Menecmo a esta visión unitaria? ¿No pudo ser a través de la observación de las diferentes formas que adopta el agua en una clepsidra? No existen documentos sobre sus investigaciones pero se sabe por escritos de Demóstenes, su contemporáneo, que en Grecia, en esa época, se utilizaba muchísimo ese tipo de reloj de agua con forma cónica.

Arquímedes

En 1906 se descubrieron en una biblioteca de Estambul unos documentos que contenían unas obras de Arquímedes, transcritas en el siglo X. (Este pergamino se ha hecho últimamente aún más famoso porque ha sido vendido en una subasta pública en Nueva York).

Junto a obras de Arquímedes que ya se conocían, apareció un texto *nuevo* que estaba perdido. Se trata del *Método mecánico*, el método de la experimentación.

En este trabajo Arquímedes escribe que en muchas ocasiones se llega al descubrimiento de una nueva propiedad a través de preguntas surgidas de la experimentación. Son estas –dice– las que hacen surgir la investigación teórica.

Para dar una idea del *Método* voy a relatar los pasajes de la obra de Arquímedes que conducen a la idea del valor del área de un trozo, un sector de parábola (figura 1).

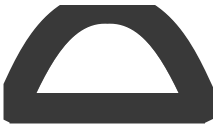


Figura 1

El texto de Arquímedes no es fácil. Se debe, a veces, leer entre líneas y reconstruir su pensamiento experimental. En el caso de la parábola la experimentación se basa en la Ley de la Palanca.

Vamos a seguir los sucesivos pasos apoyándonos en las figuras 2 a la 9.

A Arquímedes se le ocurre llenar el sector de parábola, de cuerda AB y eje HE, con hilos materiales paralelos al eje. Por tanto, esta región de la parábola tendrá así un peso.

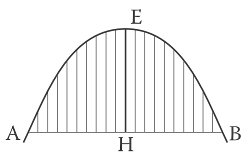


Figura 2

A continuación, construye la tangente a la parábola en B y traza por A la recta paralela al eje HE. Ambas rectas se cortan en C. Se obtiene así el triángulo ABC.

Figura 3

Prolonga ahora los hilos materiales de la parábola hasta llenar el triángulo; por lo tanto, también el triángulo tiene ahora un peso.

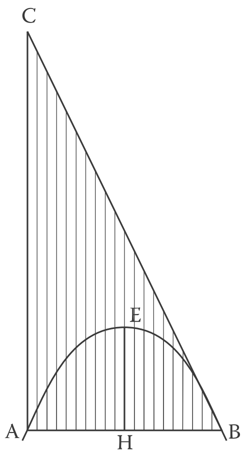


Figura 4

La idea de construir este triángulo puede ser que se le haya ocurrido sugerida por una propiedad destacada de Euclides: el segmento de subtangente FE es igual al eje EH.

Figura 5

En efecto, de esta propiedad se deduce que si unimos B con E, la recta BE divide al lado AC en dos segmentos iguales. Luego la recta BM es una mediana del triángulo.

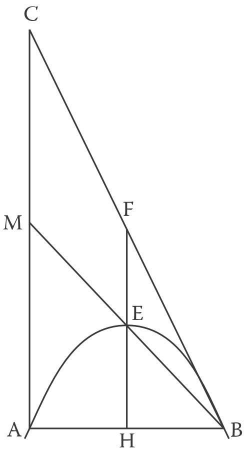


Figura 6

Ahora suprime la parábola y *ve* el triángulo que se balancea alrededor de la mediana.

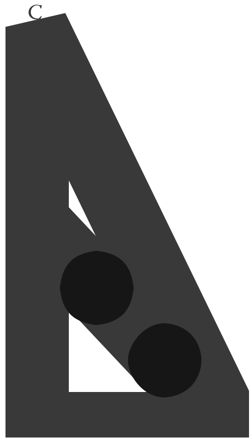


Figura 7

El baricentro del triángulo se encontrará en G, de modo que:

$$MG = \frac{1}{3} MB$$

¿Y la parábola? Para compararla con el triángulo prolonga la mediana BM hasta un punto R, de modo que MR=BM y, siempre con la vista puesta en lo concreto, imagina que BR es una vara rígida.

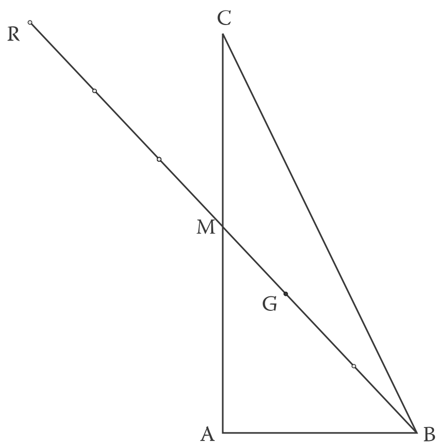


Figura 8

Descubre que el peso de la parábola equilibra el peso del triángulo si se cuelga del extremo de la vara.

Figura 9

Por la Ley de la Palanca resulta que:

Peso de la párabola = [redacted] Peso del triángulo

Luego, de los pesos a las áreas:

$$\text{Área de la parábola} = \frac{1}{3}\ \text{Área del triángulo}$$

Está claro que no se trata de una demostración matemática, pero, como escribe Arquímedes, la experimentación, el método mecánico, hace vislumbrar la verdad, estimulándonos a la investigación teórica.

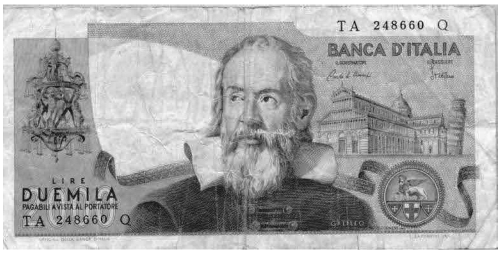
Los hilos materiales de Arquímedes se harán poco a poco mas delgados, impalpables; serán los *indivisibles* de Bonaventura Cavalieri (1598-1647) y constituirán la base del cálculo integral.

¡Y esto sucedió casi 2000 años después!

Galileo

El problema que voy a a presentar ahora señala la sensibilidad didáctica de Galileo y su confianza en el experimento práctico.

En su libro *Discorsi intorno a due nuove scienze* se asiste a un diálogo entre tres personajes, uno de los cuales representa al propio Galileo. Es este personaje el que propone el problema: *si se enrolla una hoja de papel en los dos sentidos posibles se tienen dos cilindros, ¿tienen o no estos dos cilindros el mismo volumen?* La contestación es: *seguro que tienen el mismo volumen porque el papel es el mismo*. El personaje *Galileo* observa que *nuestros campesinos nunca caen en este error*. Saben muy bien ellos que cuando recogen el trigo conviene enrollar la tela de modo que el cilindro tenga la altura menor, porque es el cilindro más bajo el que contiene más trigo. Es la prueba práctica la que ayuda a juzgar.



Billete de 2000 liras dedicado a Galileo

La misma experiencia didáctica se puede hacer hoy día. Todos los alumnos caen en la misma afirmación equivocada, mientras en ambientes de trabajadores la respuesta es la correcta. Yo misma tuve la oportunidad de poner el problema a unos cien mineros que hacían un *curso cultural*. La reacción inmediata de estos obreros fue: *No, no tienen la misma cantidad; el contenedor más bajo es más pesado*. Lo más interesante es que muchos preguntaron: ¿Por qué sucede esto? ¿Cómo se explica?

Es impresionante: han pasado siglos pero las respuestas son las mismas, por parte de los alumnos y por parte de los trabajadores.

Entre los modelos que se exponen en la exposición *2000, piezas matemáticas* están también estos contenedores de Galileo.

Pasaremos ahora a hablar de la exposición.

2000, piezas matemáticas

Empezaremos con el problema de los cilindros de Galileo. Este problema puede ser presentado a alumnos de diferentes niveles escolares. Observando que:

a) En vez de cilindros se pueden construir paralelepípedos con base cuadrada, de modo que el cálculo del volumen sea más fácil.

b) Se puede llegar a un desarrollo algebraico utilizando el cálculo literal.
c) Se puede comparar el volumen del cilindro con el del paralelepípedo de base cuadrada, ambos con la misma altura y el mismo perímetro de la base. Se descubre que el máximo pertenece al cilindro.

Muchos modelos de la Exposición conciernen al estudio de figuras planas isoperimétricas y de figuras equivalentes. Con problemas tales que obliguen a construir figuras distintas, pero que tienen *algo* en común, se aclara poco a poco la confusión muy frecuente entre área y perímetro, descubriendo también el valor máximo y el valor mínimo.

La mayoría de los asuntos tratados en la Exposición tienen esta dinámica. Una dinámica que prepara poco a poco para comprender de manera intuitiva el concepto de función.

Haré ahora unas reflexiones psicológicas y didácticas acerca del movimiento. Sabemos muy bien que los chicos están interesados en lo que cambia: el movimiento es lo que capta su atención. Sabemos muy bien lo que hoy en día representan las imágenes que se desplazan y varían a voluntad sobre la pantalla de la televisión. Pero en este caso, en esta actividad cotidiana, el desplazamiento y la deformación de las figuras se realiza tan rápidamente que no nos damos cuenta. El movimiento provoca sólo una reacción instantánea, automática, una reacción que no conduce al razonamiento. En cambio, una observación calmada, meditada, que se puede hacer cuando el movimiento no es tan rápido, es la que nos lleva, posteriormente, a la elaboración del pensamiento.

Todo el material presentado en la exposición tiene esa finalidad. No hablaré de los modelos que se presentan uno por uno. Habrá tiempo de que observen los problemas sugeridos por cada una de las cuestiones que se presentan. Quiero hacer unas consideraciones generales contestando por adelantado a unos interrogantes que surgen espontáneamente: ¿De dónde puedo sacar el dinero si quiero construir unos objetos tan bonitos como estos? Y también si dispusiéramos de los recursos para construir tales materiales ¿cuántos de nosotros, profesores, seríamos capaces de realizar modelos de un modo tan perfecto? Es verdad, tenéis razón, pero una exposición es una exposición… Ha sido preparada de una manera muy cuidada sólo con la finalidad de ilustrar de un modo claro y espectacular unos capítulos de las matemáticas que, generalmente, no atraen la atención de los alumnos.

Ni el profesor ni el alumno deben ser artistas. Vamos a reflexionar, los modelos son eficaces sólo porque provocan una dinámica investigadora. No es ciertamente la perfección de un modelo lo que lleva a una discusión matemática. El material debe ser el más barato (papel, cartulina, varillas de cualquier materia…) cosas que no cuestan prácticamente nada.

Se propone a los alumnos una mínima manipulación, claro que si es *mínima* puede ser también preocupante por el hecho de que todos, y especialmente los jóvenes, estamos perdiendo el uso de las manos… Por tanto, si lo que les proponemos les interesa, esta será también la ocasión para hacer un ejercicio manual. No tiene importancia si el modelo construido está mal hecho. Su función consiste solamente en invitar a los alumnos a darse cuenta de lo que el modelo significa y, después, a presentarlo, a contarlo, a explicar lo que significa…

¿Explicarlo? ¿a quiénes? Por ejemplo, a otros profesores no científicos, a compañeros de la misma escuela o de otras en las que no se estudian las matemáticas de la misma manera, a padres, a gente de la calle, a cualquiera. Explicarlo con sus palabras. No se debe exigir un uso del idioma perfecto, que ni existe en el lenguaje de los chicos, ni en el de la mayoría de las personas. Los alumnos se dan cuenta de la importancia de una buena exposición verbal solamente explicando y debatiendo con las personas. Decía Puig Adam en el punto IX de su decálogo: *Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento*.

Sí, pero… ¿No existe el peligro de que un modelo, bien o mal hecho, excite aún más a los alumnos que ya son de por sí difíciles de controlar? ¿No terminarán lanzándose sus cubitos o sus cilindros unos a otros o contra el profesor? No. Se produce algo muy interesante que debería ser estudiado desde un punto de vista psicológico. Sucede que, cuando el chico tiene en sus manos su *obra*, el modelo matemático hecho con sus manos, es como si su mundo se hiciese más sólido, más seguro. Este nuevo material, producto de su propia actividad, resulta ahora más importante que la tecnología sofisticada que absorbe pasivamente cada día.

Para terminar quiero poner de relieve lo que para mí es lo más importante de estas construcciones matemáticas. Su elaboración borra casi totalmente las diferencias sociales, porque, a menudo, chicos que pertenecen a los rangos sociales más desfavorecidos tienen mayor habilidad manual.

Y finalmente –y este es un hecho que no conviene olvidar– la construcción de la matemática a partir de lo concreto y de la realidad, destaca claramente las cualidades de la fantasía, la intuición, la voluntad de los chicos inmigrantes que siempre en número mayor, afortunadamente, llegan a nuestros países. ■